УДК 517.52, 517.53

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЙ ПРИНЦИП В ИНВАРИАНТНОМ ПОДПРОСТРАНСТВЕ

О.А. Кривошеева[1]

1 *kriolesya2006@yandex.ru*; Башкирский государственный университет

В работе изучаются комплексные последовательности первого порядка с конечной максимальной угловой плотностью. Получен критерий того, когда такая последовательность является частью правильно распределенного множества с заданной угловой плотностью. На этой основе приводятся полные решения проблем фундаментального принципа и базиса для инвариантного подпространства аналитических функций в ограниченной выпуклой области.

Ключевые слова: инвариантное подпространство, базис, фундаментальный принцип.

Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$, $H(D)$ — пространство функций, аналитических в D, с топологией равномерной сходимости на компактах, и $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ — последовательность комплексных чисел λ_k и их кратностей n_k такая, что система $\mathscr{E}(\Lambda) = \{z^n exp(\lambda_k z)\}$, $k \geq 1$, $n = 0, \ldots, n_k - 1$, не полна в $H(D)$. Через $W(\Lambda, D)$ обозначим замыкание в $H(D)$ линейной оболочки системы $\mathscr{E}(\Lambda)$. Тогда $W(\Lambda, D)$ — нетривиальное замкнутое подпространство в $H(D)$, инвариантное относительно оператора дифференцирования (Λ — его кратный спектр, а $\mathscr{E}(\Lambda)$ — совокупность собственных и присоединенных функций в $W(\Lambda, D)$).

Пусть $\tilde{\Lambda} = \{\mu_m, s_m\}_{m=1}^{\infty}$. Будем говорить, что $\tilde{\Lambda}$ является пополнением Λ, если существуют натуральные числа $m(k)$ такие, что $\mu_{m(k)} = \lambda_k$ и $n_k \leq s_{m(k)}$, $k \geq 1$.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ и $0 < \varphi_2 - \varphi_1 < 2\pi$. Символом $n(\varphi_1, \varphi_2, r, \Lambda)$ обозначим число точек λ_k с учетом их кратностей, попавших в сектор $\{\lambda = te^{i\varphi} : \varphi \in (\varphi_1, \varphi_2), t \in (0, r)\}$. Говорят ([1], гл. II, § 1), что Λ имеет угловую плотность (при порядке один), если для всех φ_1, φ_2 за исключением, быть может, счетного множества существует предел $n(\varphi_1, \varphi_2, \Lambda) = \lim_{r\to\infty} n(\varphi_1, \varphi_2, r, \Lambda)/r$. Положим

$$n^0(\varphi_1, \varphi_2, \Lambda) = \overline{\lim}_{\delta\to 0}\overline{\lim}_{r\to\infty}\frac{n(\varphi_1, \varphi_2, r, \Lambda) - n(\varphi_1, \varphi_2, (1-\delta)r, \Lambda)}{\delta r}.$$

Множество Λ называется правильно распределенным (см. [1], гл. II, § 1), если оно имеет угловую плотность и выполнено условие Линделефа, т.е. существует предел $\lim_{r\to\infty} \sum_{|\lambda_k|<r} n_k/\lambda_k$. Правильно распределенные множества тесно связаны с функциями регулярного роста. Пусть f — целая функция экспоненциального типа (т.е. существуют $A, B > 0$ такие, что $|f(z)| \leq A + B|z|$, $z \in \mathbb{C}$). Верхним индикатором f называется функция

$$h_f(\lambda) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \ln|f(t\lambda)|/t, \ \ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Индикатор h_f является выпуклой положительно однородной порядка один функцией, которая совпадает с комплексной опорной функцией некоторого выпуклого компакта K (т.е. с обычной опорной функцией комплексно сопряженного с K компакта), называемого сопряженной диаграммой f (см., напр., [2], гл. I, § 5, теорема 5.4):

$$h_f(\lambda) = H_K(\lambda) = \sup_{z\in K} \operatorname{Re}(\lambda z), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Говорят (см. [1], гл. III), что f имеет регулярный рост, если

$$h_f(\lambda) = \lim_{t\to\infty, t\notin E} \ln|f(t\lambda)|/t, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

где E — множество нулевой относительной меры на луче $(0,+\infty)$, т.е. мера Лебега его пересечения с интервалом $(0,r)$ бесконечна мала по сравнению с r при $r\to+\infty$. Пусть K — выпуклый компакт и z_1, z_2 — точки его границы ∂K. Через $s(z_1,z_2,K)$ обозначим длину дуги ∂K, соединяющей z_1 и z_2, движение по которой от z_1 к z_2 осуществляется в отрицательном направлении (по часовой стрелке). Для каждого $\varphi\in\mathbb{R}$ пересечение $\Gamma(\varphi)$ опорной прямой $l(\varphi) = \{z : \operatorname{Re}(ze^{i\varphi}) = H_K(e^{i\varphi})\}$ и границы ∂K является либо точкой $z(\varphi)$ либо отрезком. Множество $\Phi(K)$ направлений φ, для которых $\Gamma(\varphi)$ — отрезок, не более чем счетное. Положим

$$S_K(\varphi_1,\varphi_2) = \sup_{z_1\in\Gamma(\varphi_1), z_2\in\Gamma(\varphi_2)} s(z_1,z_2,K).$$

Функция $S_K(\varphi_1,\varphi_2)$ является неубывающей по φ_2 и невозрастающей по φ_1, а множество ее точек разрыва по обеим переменным совпадает с $\Phi(K)$. Если $\varphi_1,\varphi_2\in\Phi(K)$, то $S_K(\varphi_1,\varphi_2) = s(z(\varphi_1),z(\varphi_2),K)$.

Согласно теореме 4 главы III книги [1] функция f имеет регулярный рост тогда и только тогда, когда ее нулевое множество является правильно распределенным. При этом для всех $\varphi_1,\varphi_2\notin\Phi(K)$, $0<\varphi_2-\varphi_1<2\pi$, верно равенство (см. [1], гл. II, § 1, формула (2.07))

$$n(\varphi_1,\varphi_2,\widetilde{\Lambda}) = S_K(\varphi_1,\varphi_2)/2\pi, \tag{1}$$

где K — сопряженная диаграмма, а $\widetilde{\Lambda}$ — кратное нулевое множество f.

Теорема 1. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ и K — выпуклый компакт. Равносильны утверждения:*

1) Существует $\gamma>0$ такое, что для всех $\varphi_1,\varphi_2\notin\Phi(K)$ с условием $0<\varphi_2-\varphi_1<\gamma$ выполнено неравенство $n^0(\varphi_1,\varphi_2,\Lambda)\le S_K(\varphi_1,\varphi_2)/2\pi$.

2) Существует пополнение $\widetilde{\Lambda}$ последовательности Λ, которое является правильно распределенным множеством, и при этом верно (1).

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ и D — ограниченная выпуклая область. Напомним (см. [3]), что последовательность Λ совместима с D, если она является частью нулевого множества (с учетом кратностей n_k) целой функции f экспоненциального типа и регулярного роста, сопряженная диаграмма которой является замыканием $\bar{D}$ области D (т.е. $h_f = H_{\bar{D}} = H_D$). Пусть $K=\bar{D}$. Если $\widetilde{\Lambda}$ — правильно распределенное пополнение Λ, удовлетворяющее (1), то его каноническая функция f имеет индикатор h_f, совпадающий с $H_{\bar{D}}$ (см. [1], гл. II, теорема 4). Отсюда следует, что утверждение 2) теоремы 1 эквивалентно совместимости Λ с областью D. Таким образом, верно

Следствие. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) Λ совместима с D.

2) Существует $\gamma>0$ такое, что для всех $\varphi_1,\varphi_2\notin\Phi(\bar{D})$ с условием $0<\varphi_2-\varphi_1<\gamma$ выполнено неравенство $n^0(\varphi_1,\varphi_2,\Lambda)\le S_{\bar{D}}(\varphi_1,\varphi_2)/2\pi$.

Пусть $B(w,r)$ — открытый круг с центром в точке w и радиуса r. Следуя работе [4], введем функцию

$$q_\Lambda^m(\lambda,\delta) = \prod_{\lambda_k\in B(\lambda_m,\delta|\lambda_m|),k\neq m} \left(\frac{\lambda-\lambda_k}{3\delta|\lambda_k|}\right)^{n_k}, \quad m \geq 1.$$

Если круг $B(\lambda_m,\delta|\lambda_m|)$ не содержит точек λ_k, $k \neq m$, то $q_\Lambda^m(z,\delta) \equiv 1$. Положим (см. [4])

$$S_\Lambda = \lim_{\delta\to 0} \varliminf_{m\to\infty} \frac{\ln|q_\Lambda^m(\lambda_m,\delta)|}{|\lambda_m|}.$$

Для $\delta \in (0,1/3)$ величина $S_\Lambda \leq 0$. Равенство $S_\Lambda = 0$ означает, что точки λ_k в каком-то смысле отделены друг от друга. Характер этой отделенности проясняется в лемме 2.3 работы [5].

Теперь мы можем сформулировать результаты, полностью решающие проблемы базиса и фундаментального принципа для произвольного нетривиального замкнутого инвариантного подпространства в $H(D)$, которое допускает спектральный синтез, в случае ограниченной выпуклой области D.

Теорема 2.*Пусть* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ *и* D *— ограниченная выпуклая область такие, что* $W(\Lambda, D)$ *нетривиально. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) Система $\mathcal{E}(\Lambda)$ *является базисом в* $W(\Lambda, D)$*;*

2) $S_\Lambda = 0$ *и существует* $\gamma > 0$ *такое, что для всех* $\varphi_1, \varphi_2 \notin \Phi(\bar{D})$ *с условием* $0 < \varphi_2 - \varphi_1 < \gamma$ *выполнено неравенство* $n^0(\varphi_1,\varphi_2,\Lambda) \leq (S_{\bar{D}}(\varphi_1,\varphi_2)/2\pi$.

Литература

1. Левин Б. Я. *Распределение корней целых функций.* – М.: Гостехиздат, 1956.

2. Леонтьев А. Ф. *Целые функции. Ряды экспонент.* – М.: Наука, 1983.

3. Кривошеев А. С., Кривошеева О. А. *Базис в инвариантном подпространстве аналитических функций* // Матем. сб. – 2013. – Т. 204. – № 12. – С. 49–104.

4. Кривошеев А. С. *Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях* // Изв. РАН. Сер. мат. – 2004. – Т. 68. – № 2. – С. 71–136.

5. Кривошеев А. С., Кривошеева О. А. *Базис в инвариантном подпространстве целых функций* // Алгебра и анализ –2015. – Т. 27. – № 2. – С. 132–195.

FUNDAMENTAL PRINCIPLE IN INVARIANT SUBSPACE

O.A. Krivosheeva

In the paper, first-order complex sequences with finite maximal angular density are studied. A criterion for such a sequence to be a part of a regularly distributed set with a given angular density is obtained. Using this criterion, we present complete solutions of the fundamental principle problem and the basis problem for an invariant subspace of analytic functions in a bounded convex domain.

Keywords: invariant subspace, basis, fundamental principle.